Math ②

Date / / Subject

* First order Diffeferntial Equations :-

* Linear D.E :-

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$ (الصيغة العامة)

* معامل $\frac{dy}{dx}$ لازم يكون 1 ، وال y أسها 1 ومضروبة في دالة لـ x اسمها $P(x)$.

* طريقة الحل :-

① لإيجاد معامل التكامل ← بندور على دالة لو ضربناها في المعادلة تحول الطرف الشمال لشكل يسهل تكامله.

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

② التعويض في قانون الحل العام

$$I(x) \cdot y = \int I(x) \cdot Q(x)\, dx + C$$

* Bernoulli's D.E :-

* معادلة برنولي هي معادلة شبه خطية بس مشكلتها إن الطرف اليمين مضروب في y^n

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

* خطوات تحويلها لمعادلة خطية :-

① التخلص من y^n ← عشان نرجعها للشكل الخطي بنقسم المعادلة على y^n أو نضربها في y^{-n}

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x) \longrightarrow (1)$$

Date / / Subject

② التعويض ← بناخد الجزء اللي جنب $P(x)$ ونفرضه بمتغير جديد اسمه Z

$$Z = y^{1-n}$$

③ التفاضل ← بنفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

$$\frac{dZ}{dx} = (1-n)\, y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

بقسمة الطرفين على $(1-n)$ عشان نجيب قيمة الجزء الأول من المعادلة (1)

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dZ}{dx} \longrightarrow (2)$$

④ التعويض في المعادلة الأصلية ← بنشيل كل حاجة في معادلة (1) ونحط ما يساويها من التعويضات الجديدة

$$\frac{1}{1-n}\frac{dZ}{dx} + P(x)Z = Q(x)$$

نضرب المعادلة كلها في $(1-n)$ عشان نخلص من الكسر

$$\frac{dZ}{dx} + (1-n)P(x)Z = (1-n)Q(x) \longrightarrow$$ معادلة خطية

EX $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = x^2$

$P = \frac{1}{x}$, $Q = x^2$

$I(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx}$

$I(x) = \cancel{e}^{\ln x} = x$

$I(x) \cdot y = \int I(x) \cdot Q(x)\, dx + C$

$x \cdot y = \int x \cdot x^2\, dx + C$

$xy = \int x^3\, dx + C$

$\boxed{xy = \frac{x^4}{4} + C}$

$y = \frac{x^3}{4} + \frac{C}{x}$

Date / / Subject

Ex $xy - \frac{dy}{dx} = y^3 e^{-x^2}$

$-\frac{dy}{dx} + xy = e^{-x^2} y^3$ (ترتيب المعادلة)

$-y^{-3}\frac{dy}{dx} + xy^{-2} = e^{-x^2} \longrightarrow (1)$ (التخلص من y^3)

$z = y^{-2}$ (الفرض)

نفاضل الطرفين بالنسبة لـ x

$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx}$

نقسم على 2 عشان نضبط شكلها زي معادلة (1)

$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} = -y^{-3}\frac{dy}{dx} \longrightarrow (2)$

التعويض في (1)

$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + xz = e^{-x^2}$

نضرب المعادلة كلها في 2 عشان نخلي معامل التفاضل 1

$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2e^{-x^2} \longrightarrow$ كده اتحولت لمعادلة خطية في z

$P = 2x \ , \ Q = 2e^{-x^2}$

$I(x) = e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2}$

$I(x) \cdot z = \int I(x) \cdot Q(x)\,dx + c$

$e^{x^2} \cdot y^{-2} = \int e^{x^2} \cdot 2e^{-x^2}\,dx + c$

* هنا بنضرب e^{x^2} في e^{-x^2} وفي الضرب بنجمع الأسس $x^2 - x^2 = 0$ وأي حاجة أس صفر تساوي 1

Date / / Subject

$e^{x^2} y^{-2} = \int 2\,dx + c$

$e^{x^2} y^{-2} = 2x + c$ $\quad (* y^2)$

$e^{x^2} = (2x + c)\, y^2$

* 2nd order D.E :-

$a\frac{d^2y}{dx^2} + b\frac{dy}{dx} + cy = f(x)$

$f(x) = 0 \longrightarrow$ 2nd order D.E homogenous

$f(x) \neq 0 \longrightarrow$ non homogenous

homogenous D.E :-

$a y'' + b y' + c y = 0 \longrightarrow (1)$

* احنا بندور على دالة لو فاضلناها مرة ومرتين وجمعنا الناتج يطلع صفر. الدالة الوحيدة اللي مشتقتها بتبقى نفس الدالة هي الدالة الأسية e^{mx}.

$y = e^{mx}$

$\left.\begin{aligned} y' &= m e^{mx} \\ y'' &= m^2 e^{mx} \end{aligned}\right\} (2)$

بالتعويض في المعادلة الأصلية وأخذ e^{mx} عامل مشترك

$a m^2 e^{mx} + b m e^{mx} + c e^{mx} = 0$

$(am^2 + bm + c) e^{mx} = 0$

$am^2 + bm + c = 0$

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$\sqrt{\ } > 0$	$\sqrt{\ } = 0$	$\sqrt{\ } < 0$
$m_1 \neq m_2$	$m_1 = m_2 = m$	$m = \alpha \pm i\beta$
$y_h = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$	$y_h = (C_1 + C_2 x) e^{mx}$	$y_h = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

EX $y'' = -w^2 y$

$y'' + w^2 y = 0$

$m^2 e^{mx} + w^2 e^{mx} = 0 \quad \div e^{mx}$

$m^2 + w^2 = 0$

$m^2 = -w^2$

$m = \pm\sqrt{-w^2} \longrightarrow m = \pm wi$

* جذر السالب واحد هو i (تخيلي)

* دي الحالة الثالثة، هنا الجزء الحقيقي $\alpha = 0$، والجزء التخيلي $\beta = w$

$y_h = e^{0x}(C_1 \cos wx + C_2 \sin wx)$

$y_h = C_1 \cos wx + C_2 \sin wx$

EX① $3\frac{dy}{dx} - 5y = 10$, $x = 0$ at $y = 4$

$\frac{dy}{dx} - \frac{5}{3}y = \frac{10}{3}$

$P = -\frac{5}{3}$, $Q = \frac{10}{3}$

$I(x) = e^{\int -\frac{5}{3}dx} = e^{-\frac{5}{3}x}$

$I(x) \cdot y = \int I(x) \cdot Q\, dx + C$

$y \cdot e^{-\frac{5}{3}x} = \int \frac{10}{3} e^{-\frac{5}{3}x} dx + C$

$y \cdot e^{-\frac{5}{3}x} = \frac{10}{3}\left(\frac{e^{-\frac{5}{3}x}}{\frac{-5}{3}}\right) + C$

$y \cdot e^{-\frac{5}{3}x} = -2e^{-\frac{5}{3}x} + C \quad \boxed{* e^{\frac{5}{3}x}}$

$y = -2 + Ce^{\frac{5}{3}x}$

لإيجاد الثابت C $(x = 0, y = 4)$

$4 = -2 + Ce^0 \longrightarrow 4 = -2 + C$

$C = 6 \longrightarrow y = -2 + 6e^{\frac{5}{3}x}$

EX② $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 3x$, $y = 2$ at $x = -1$

$P = \frac{1}{x}$, $Q = 3x$

$I(x) = e^{\int \frac{1}{x}dx} = \cancel{e}^{\ln x} = x$

$x \cdot y = \int x \cdot (3x) dx + C$

$xy = \int 3x^2 dx + C$

$xy = x^3 + C \quad \div x$

$y = x^2 + \frac{C}{x}$

لإيجاد الثابت C

$2 = (-1)^2 + \frac{C}{-1}$

$2 = 1 - C \longrightarrow C = -1$

$y = x^2 - \frac{1}{x}$

EX③ $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{1-x} = 1 - x^2$, $y = 0$ at $x = -1$

$P = \frac{1}{1-x}$, $Q = 1 - x^2$

$I(x) = e^{\int \frac{1}{1-x}dx} = \cancel{e}^{-\ln(1-x)} = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$

$$\frac{1}{1-x}\cdot y = \int \frac{1}{1-x}(1-x^2)\,dx + c$$

$$\frac{y}{1-x} = \int \frac{(1-x)(1+x)}{1-x}\,dx + c$$

$$\frac{y}{1-x} = \int (1+x)\,dx + c \longrightarrow \frac{y}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + c$$

$$y = (1-x)\left(x + \frac{x^2}{2} + c\right)$$

* لإيجاد الثابت c ($x=-1$ ، $y=0$)

$$0 = (1-(-1))\left(-1 + \frac{(-1)^2}{2} + c\right)$$

$$0 = 2\left(-\frac{1}{2} + c\right) \longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$y = (1-x)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

Ex 4 $\frac{dy}{dx} + y\cot x = \cos x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = \frac{5}{2}$

$$P = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$Q = \cos x$$

$$I(x) = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x}dx} = e^{\ln(\sin x)} = \sin x$$

$$y\cdot \sin x = \int \sin x \cdot \cos x\,dx + c$$

$$y \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + c$$

$$y = \frac{\sin x}{2} + \frac{c}{\sin x}$$

لإيجاد الثابت c

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + \frac{c}{1}$$

$$c = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 2$$

$$y = \frac{\sin x}{2} + \frac{2}{\sin x}$$

Ex 5 $(x^2+1)\frac{dy}{dx} - xy = x$, $x=1$, $y=1$

بالقسمة على (x^2+1) لتصبح خطية قياسية

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{x^2+1}y = \frac{x}{x^2+1}$$

$$P = \frac{-x}{x^2+1} \quad , \quad Q = \frac{x}{x^2+1}$$

$$I(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx} = e^{-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)} = (x^2+1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x}{x^2+1}\,dx + c$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = \int x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx + c$$

* نضرب في 2 ونقسم على 2 عشان نخلي برة القوس مشتقة ما بداخل القوس

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-\frac{3}{2}}\,dx + c$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right) + c$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+1}} = -(x^2+1)^{-\frac{1}{2}} + c = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}} + c \quad \boxed{\times \sqrt{x^2+1}}$$

$$y = -1 + c\sqrt{x^2+1}$$

لإيجاد الثابت c

$$1 = -1 + c\sqrt{1^2+1} \longrightarrow 2 = c\sqrt{2} \longrightarrow c = \sqrt{2}$$

$$y = -1 + \sqrt{2}\sqrt{x^2+1} = -1 + \sqrt{2x^2+2}$$

Date / / Subject

EX⑥ $3y-2\frac{dy}{dx}=y^3e^{4x}$, $x=0, y=1$

$-2\frac{dy}{dx}+3y=e^{4x}y^3$ (ترتيب المعادلة لتشبه برنولي)

(بالقسمة على -2)

$\frac{dy}{dx}-\frac{3}{2}y=-\frac{1}{2}e^{4x}y^3$

(نقسم على y^3)

$y^{-3}\frac{dy}{dx}-\frac{3}{2}y^{-2}=-\frac{1}{2}e^{4x}$

$z=y^{-2} \longrightarrow$ نشتق

$\frac{dz}{dx}=-2y^{-3}\frac{dy}{dx} \longrightarrow -\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}=y^{-3}\frac{dy}{dx}$

$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}-\frac{3}{2}z=-\frac{1}{2}e^{4x}$ $\boxed{*-2}$

$\frac{dz}{dx}+3z=e^{4x} \longrightarrow$ (linear in z)

$P=3$, $I(x)=e^{\int 3dx}=e^{3x}$

$z\cdot e^{3x}=\int e^{3x}\cdot e^{4x}dx+c$

$z\cdot e^{3x}=\int e^{7x}dx+c \longrightarrow ze^{3x}=\frac{1}{7}e^{7x}+c$

$z=\frac{1}{7}e^{4x}+ce^{-3x} \longrightarrow \frac{1}{y^2}=\frac{1}{7}e^{4x}+ce^{-3x}$

لإيجاد الثابت c

$1=\frac{1}{7}e^0+ce^0 \longrightarrow 1=\frac{1}{7}+c \longrightarrow c=\frac{6}{7}$

$\frac{1}{y^2}=\frac{e^{4x}+6e^{-3x}}{7}$

Date / / Subject

EX⑦ $2y-x\frac{dy}{dx}=x(x-1)y^4$, $y^3=\frac{1}{4}$ at $x=1$

$-x\frac{dy}{dx}+2y=(x^2-x)y^2$ (ترتيب المعادلة كبرنولي)

(بالقسمة على $-x$)

$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y=-(x-1)y^4$ $\boxed{\div y^4}$

$y^{-4}\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x}y^{-3}=1-x$

$z=y^{-3} \longrightarrow$ نشتقها

$\frac{dz}{dx}=-3y^{-4}\frac{dy}{dx} \longrightarrow -\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}=y^{-4}\frac{dy}{dx}$

$-\frac{1}{3}\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=1-x$ $\boxed{*-3}$

$\frac{dz}{dx}+\frac{6}{x}z=3x-3 \longrightarrow$ (linear in z)

$P=\frac{6}{x}$, $I(x)=e^{\int\frac{6}{x}dx}=e^{6\ln x}=x^6$

$z\cdot x^6=\int x^6(3x-3)dx+c$

$z\cdot x^6=\int(3x^7-3x^6)dx+c$

$z\cdot x^6=\frac{3x^8}{8}-\frac{3x^7}{7}+c$ $\boxed{\div x^6}$

$z=\frac{3x^2}{8}-\frac{3x}{7}+\frac{c}{x^6} \longrightarrow y^{-3}=\frac{3x^2}{8}-\frac{3x}{7}+\frac{c}{x^6}$

لإيجاد الثابت c ($y^{-3}=4 \longleftarrow y^3=\frac{1}{4}$)

$4=\frac{3(1)^2}{8}-\frac{3(1)}{7}+\frac{c}{1^6} \longrightarrow c=\frac{227}{56}$

$\frac{1}{y^3}=\frac{3x^2}{8}-\frac{3x}{7}+\frac{227}{56x^6}$